Devoir de synthèse n°3 Année Scolaire 1999-2000 2ème Année.

Exercice n° 1 :

On donne les fonctions f et g définies sur IR par : $f(x) = \frac{-2}{x+2}$ et $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$

1) Etudier f et g et tracer dans repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives C_f et C_g.

2) On pose $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$

   a) Montrer que $h(x) = g(x) - 2$ puis tracer C_h à partir de C_g et donner le tableau de variation de h .

   b) Résoudre graphiquement l'inéquation $\frac{1}{2}x^2 < -x + \frac{3}{2}$.

3) On pose $k(x) = \frac{1}{|x+2|}$.

   a) Tracer la courbe C_k à partir de C_f puis donner le tableau de variation de k.

   b) Résoudre graphiquement $\frac{1}{|x+2|} < 1$.

Exercice n° 2 :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne le point I (5, 4).

1)Ecrire une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ le cercle de centre I de rayon 5 puis montrer que $\mathscr{C}$ et l'axe des ordonnées : (y'y) sont tangents en un point T dont-on précisera les coordonnées.

2) Le cercle $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses (x' x) en deux points A et B.
Chercher les coordonnées de A et B puis montrer que $OA.\times OB = OT^2$.

3) On pose Δ_A et Δ_B les tangentes au cercle $\mathscr{C}$ en A et B.

   a) Ecrire une équation cartésienne pour chacune des droites Δ_A et Δ_B.

   b) Chercher les coordonnées du point C le point d'intersection de Δ_A et Δ_B .

   c) Calculer l'aire S du triangle ABC.

4) On pose $\mathscr{C}' = \{ M(x, y) ;\ x^2 + y^2 + 2x + 8y - m^2 + 3m - 10 = 0\}$ où m est un paramètre réel.

   a) Montrer que $\mathscr{C}'$ est un cercle pour tous $m \in$ IR.

   b) Donner le centre I' du cercle $\mathscr{C}'$ pour m = 2 et montrer dans ce cas que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangentes extérieurement.

Exercice n° 3 :

1) On donne $x \in [0, \pi]$ et on pose $f(x) = -8\sin^4 x + 6\sin^2 x - 1$.

   a) Calculer f(0), $f(\frac{\pi}{2})$ et $f(\frac{\pi}{6})$.

   b) Montrer que $f(x) = (4\cos^4 x - 3)(2\sin^2 x - 1)$.

   c) Résoudre dans l'intervalle $[0, \pi]$ l'équation f(x) =0.

2) On donne $x \in]0, \pi[\setminus \{\frac{\pi}{2}\}$.

   a) Montrer que $\text{tg}x + \frac{1}{\text{tg}x} = \frac{1}{\cos x.\sin x}$.

   b) En déduire que $\text{tg}^2x + \frac{1}{\text{tg}^2x} = \frac{1}{\sin^2x.\cos^2x} - 2$.